优化模型与软件工具

主讲教师：董庆兴

华中师范大学 信息管理学院
qxdong@mail.ccnu.edu.cn

2017 年 11 月 14 日

大纲

1. 分离定理
2. 广义不等式
3. 对偶锥与广义不等式
4. 最小元与极小元

投影定理

投影定理

对于非空闭凸集 $C \in \mathbb{R}^n$ 和向量 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$，则存在一个唯一的向量 $\mathbf{x}^* \in C$ 为 $\min_{\mathbf{x}\in C} \|\mathbf{z}-\mathbf{x}\|_2$ 的解，$\mathbf{x}^*$ 被称作 $\mathbf{z}$ 在 C 上的投影并且满足

$$(\mathbf{z}-\mathbf{x}^*)^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in C \tag{1}$$

支撑超平面定理

支撑超平面定理

设 C 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空凸集，向量 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$，若 $\bar{\boldsymbol{x}} \notin \textbf{int}\ C$，则存在一个穿过 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的超平面使得 X 属于它的一个闭半空间，即存在向量 $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ 满足

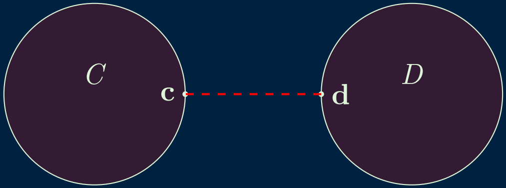
$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x},\ \forall \mathbf{x} \in C \tag{2}$$

超平面分离定理

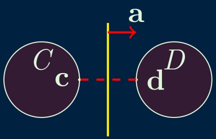
超平面分离定理

对于两个不相交的非空凸集 C 和 D，存在 $\mathbf{a} \neq 0$ 和 $\mathbf{b}$ 使得对于所有的 $\mathbf{x}_1 \in C$ 和 $\mathbf{x}_2 \in D$ 有 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}, \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}$，也就是存在分离超平面 $H = \{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$

为证明上述定理，我们首先给出一种特殊情况（作业：证明更普通的情况），定义两集合之间的距离为 $\mathbf{dist}(C, D) = \inf\{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2 | \mathbf{u} \in C, \mathbf{v} \in D\} > 0$，并且存在 $\mathbf{c} \in C, \mathbf{d} \in D$ 达到这个最小距离，也就是 $\|\mathbf{c} - \mathbf{d}\|_2 = \mathbf{dist}(C, D)$，



超平面分离定理



- 考虑上述特殊情况，则我们可以构建一个超平面 $H=\{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 垂直并且平分线段 $\mathbf{cd}$
- 已知 $\mathbf{c},\mathbf{d}$ 坐标，可以很方便的求出超平面 $H=\{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=\mathbf{b}\}$ 的具体值
- 令 $\mathbf{a}=\mathbf{d}-\mathbf{c},\mathbf{b}=\frac{\|\mathbf{d}\|_2^2-\|\mathbf{c}\|_2^2}{2}$，仿射函数 $f(\mathbf{x})=\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}-\mathbf{b}=(\mathbf{d}-\mathbf{c})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{d}+\mathbf{c}}{2})$ 在 C 中非正而在 D 中非负，即超平面 $\{\mathbf{x}|\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=\mathbf{b}\}$ 分离了 C 和 D

- 首先我们用反证法证明 f 在 D 中非负（证明 f 在 C 中非正思路相同，只需交换 C,D 并考虑 $-f$)，假设存在一点 $\mathbf{u}\in D$，且 $f(\mathbf{u})=(\mathbf{d}-\mathbf{c})^{\mathrm{T}}(\mathbf{u}-\frac{(\mathbf{d}+\mathbf{c})}{2})=(\mathbf{d}-\mathbf{c})^{\mathrm{T}}(\mathbf{u}-\mathbf{d}+\frac{(\mathbf{d}-\mathbf{c})}{2})=(\mathbf{d}-\mathbf{c})^{\mathrm{T}}(\mathbf{u}-\mathbf{d})+\frac{\|\mathbf{d}-\mathbf{c}\|_2^2}{2}<0$，可知
$$(\mathbf{d}-\mathbf{c})^{\mathrm{T}}(\mathbf{u}-\mathbf{d})<0 \qquad (3)$$
- 而由于 $\mathbf{d}$ 是 D 中离 c 最近的点，那么 $\mathbf{d}$ 是 $\mathbf{c}$ 在 D 中的投影，从而由式 (1) 有
$$(\mathbf{c}-\mathbf{d})^{\mathrm{T}}(\mathbf{u}-\mathbf{d})\le 0$$
- 这与式 (3) 矛盾。因此 f 在 D 中非负

仿射集与凸集分离

- 设 C 为凸集，D 为仿射集，也就是 $D = \{F\mathbf{y} + \mathbf{g} | \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\}$，其中 $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$。设 C, D 不相交，那么根据超平面分离定理，存在 $a \neq 0$ 和 b 使得 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \forall \mathbf{x} \in C$；$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \forall \mathbf{x} \in D$
- 从而对于任意的 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ 都有 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}F\mathbf{y} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} \geq \mathbf{b}$，也就是 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}F\mathbf{y} \geq \mathbf{b} - \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}$
- 在 $\mathbb{R}^m$ 上，只有当一个线性函数为零的时候它才是有界的，因此可知 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}F = 0, \mathbf{b} - \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} \leq 0$
- 从而仿射集与凸集分离等价于：存在 $a \neq 0$ 使得 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}F = 0$ 和 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}$ 对于所有 $\mathbf{x} \in C$ 都成立

严格分离

- 称集合 C_1 C_2 被超平面 $H = \{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$严格分离如果两集合分别位于 H 的不同的半空间内，也就是

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 < \mathbf{b} < \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2, \forall \mathbf{x}_1 \in C_1, \forall \mathbf{x}_2 \in C_2$$

  或

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2 < \mathbf{b} < \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1, \forall \mathbf{x}_1 \in C_1, \forall \mathbf{x}_2 \in C_2$$

- 不相交的凸集并不一定能够被超平面严格分离（即使集合是闭集）：例如 $C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 = 0\}$ 和 $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 > 0, x_1 x_2 > 1\}$

点和凸集的严格分离

点和凸集的严格分离

令集合 C 为闭凸集，$\mathbf{x}_0 \notin C$，那么存在将 $\mathbf{x}_0$ 与 C 严格分离的超平面

- 对于足够小的 $\varepsilon > 0$，存在两个不相交的集合 C 和 $\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \epsilon)$。根据超平面分离定理，存在 $\mathbf{a} \neq 0$ 和 $\mathbf{b}$，使得对于任意 $\mathbf{x} \in C$ 有 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$；对于任意 $\mathbf{x} \in D$ 有 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$
- 由于 $\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varepsilon) = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{u} | \|\mathbf{u}\|_2 \leq \epsilon\}$ 从而有
$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_o + \mathbf{u}) \geq \mathbf{b},\ \forall \|\mathbf{u}\|_2 \leq \epsilon$$
- 由于 $\mathbf{u} = \frac{-\varepsilon \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|_2} = \arg\min \mathbf{a}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_o + \mathbf{u})$，代入上式可得 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_o - \varepsilon\|\mathbf{a}\|_2 \geq b$
- 所以仿射函数 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - b - \frac{\varepsilon\|\mathbf{a}\|_2}{2}$ 在 C 上是负的，而在 $\mathbf{x}_0$ 点是正的，从而 C 和 $\mathbf{x}_0$ 被严格分离
- 作为一个直接的结果，我们可以得到：一个闭凸集是包含它的所有半空间的交集
- 令 C 为闭凸集，S 为所有包含 C 的半空间，显然 $\mathbf{x} \in C \Rightarrow \mathbf{x} \in S$。也就是 $C \subseteq S$
- 接下来要证明 $S \subseteq C$，假设不成立则存在 $\mathbf{x} \in S, \mathbf{x} \notin C$，那么根据点和凸集严格分离定理，存在一个将 C 和 $\mathbf{x}$ 严格分离的超平面，也就是存在一个包含 C 但是并不包含 $\mathbf{x}$ 的半空间。也就是 $\mathbf{x} \notin S$，从而矛盾，有 $S \subseteq C$

超平面分离定理的逆定理

- 分离超平面的存在表明 C 和 D 不相交是不成立的
- 例子：$C = D = \{0\} \subseteq \mathbf{R}$，超平面 $x = 0$ 可以分离 C 和 D
- 凸性之外加条件可以成立：例如 C, D 为凸集且 C 为开集，如存在一个仿射函数 f 在 C 中非正而在 D 中非负，那么 C 和 D 不相交
- f 在 C 上非正，那么如果 f 在开集 C 上某一点为零，那么必然会在这个点附近取正值，这与前述矛盾，所以 f 在 C 上为负

择一定理

严格线性不等式的择一定理

严格线性不等式

$$Ax \prec \mathbf{b} \tag{4}$$

无解的充要条件是凸集 $C = \{\mathbf{b} - A\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ 与集合 $D = \mathbb{R}^m_{++} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{y} \succ 0\}$ 不相交

- 集合 D 是开集，集合 C 是仿射集合。根据前述的结论，C 和 D 不相交的充要条件是，存在分离超平面，即存在非零的 $\lambda \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mu \in \mathbb{R}$ 使得 C 中 $\lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \le \mu$ 而 D 中 $\lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \ge \mu$
- 第一个条件意味着对于所有的 $\mathbf{x}$ 都有 $\lambda^{\mathrm{T}}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) \le \mu$，这说明 $A^{\mathrm{T}}\lambda = 0, \lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \le \mu$
- 第二个条件意味着 $\lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \ge \mu$ 对于所有的 $\mathbf{y} \succ 0$ 均成立，这表明 $\mu \le 0$ 且 $\lambda \succeq 0, \lambda \ne 0$
- 将上述结果放在一起，可知不等式组 (4) 无解的充要条件是存在 $\lambda \in \mathbb{R}^m$ 使得
$$\lambda \ne 0, \lambda \succeq 0, A^{\mathrm{T}}\lambda = 0, \lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \le 0 \tag{5}$$
- 这些不等式和等式关于 $\lambda \in \mathbb{R}^m$ 也是线性的，因此我们称 (4) 和 (5) 构成一对择一选择：对于任意的 A 和 $\mathbf{b}$，两者中仅有一组有解

正常锥

称锥 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 为正常锥（**Proper Cone**），如果它满足：

- K 是凸的
- K 是闭的，包含边界
- K 是实的，即具有非空内部
- K 是尖的（有端点），即不包含直线（或者等价地，$\mathbf{x} \in K, -\mathbf{x} \in K \Rightarrow \mathbf{x} = 0$）

例子：平面上包含数轴的第一象限（非负象限）

广义不等式

- 正常锥 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 下的偏序关系为

$$\mathbf{x} \preceq_K \mathbf{y} \Longleftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} \in K$$

- 当 $K = \mathbb{R}_+$ 时，偏序关系 $\preceq_K$ 就是通常意义上 $\mathbb{R}$ 中的序 $\leq$
- 例子：非负象限 $K = \mathbb{R}_+^n$ 是一个正常锥。相应的广义不等式 $\preceq_K$ 对应于向量间的分量不等式，及 $\mathbf{x} \preceq_K y$ 等价于 $x_i \leq y_i, i = 1, \cdots, n$
- 正常锥 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 下的严格偏序关系为

$$\mathbf{x} \prec_K \mathbf{y} \Longleftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} \in \textbf{int} \ \ K$$

- 当 $K = \mathbb{R}_+$ 时，严格偏序关系 $\prec_K$ 就是通常意义上 $\mathbb{R}$ 中的序 $<$
- 因此广义不等式包含了 $\mathbb{R}$ 中的（不严格和严格）不等式

广义不等式性质

广义不等式 $\preceq_K$ 有如下性质（课后作业证明）：

- 加法保序：如果 $\mathbf{x} \preceq_K \mathbf{y}$，且 $\mathbf{u} \preceq_K \mathbf{v}$，那么 $\mathbf{x}+\mathbf{u} \preceq_K \mathbf{y}+\mathbf{v}$
- 传递性：如果 $\mathbf{x} \preceq_K \mathbf{y}$，且 $\mathbf{y} \preceq_K \mathbf{z}$，那么 $\mathbf{x} \preceq_K \mathbf{z}$
- 非负数乘保序：如果 $\mathbf{x} \preceq_K \mathbf{y}$，且 $\alpha \geq 0$，那么 $\alpha\mathbf{x} \preceq_K \alpha\mathbf{y}$
- 自反：$\mathbf{x} \preceq_K \mathbf{x}$
- 反对称：如果如果 $\mathbf{x} \preceq_K \mathbf{y}$，且如果 $\mathbf{y} \preceq_K \mathbf{x}$，那么 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$
- 极限运算保序：如果对于 $i = 1, 2, \cdots$ 均有 $\mathbf{x}_i \preceq_K \mathbf{y}_i$，当 $i \to \infty$ 有 $\mathbf{x}_i \to \mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}_i \to \mathbf{y}$，那么 $\mathbf{x} \preceq_K \mathbf{y}$

最小与极小元

- 如果对于 $\forall \mathbf{y} \in S$ 都有 $\mathbf{x} \preceq_K \mathbf{y}$, 则称 $\mathbf{x} \in S$ 是 S(关于广义不等式 $\preceq_K$) 的最小元（minimum element）
- 类似地，我们可以定义关于广义不等式的最大元。并且如果一个集合有最小（或最大）元，那么它们是唯一的
- 对于 $\mathbf{y} \in S$ 如果有 $\mathbf{y} \preceq_K \mathbf{x}$, 则有 $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, 则称 $\mathbf{x} \in S$ 是 S(关于广义不等式 $\preceq_K$) 的极小元（minimal element）
- 同样地，可以定义关于广义不等式的极大元，一个集合可以有多个极小（大）元

最小元和极小元的集合描述

- 元素 $\mathbf{x} \in S$ 是 S 中的一个最小元当且仅当 $S \subseteq \mathbf{x} + K$，其中 $\mathbf{x} + K$ 表示可以与 $\mathbf{x}$ 相比并且大于等于（根据 $\preceq_K$）$\mathbf{x}$ 的所有元素
- 元素 $\mathbf{x} \in S$ 是 S 中的一个极小元当且仅当 $\mathbf{x} - K \cap S = \{\mathbf{x}\}$，其中 $\mathbf{x} - K$ 表示可以与 $\mathbf{x}$ 相比并且小于等于（根据 $\preceq_K$）$\mathbf{x}$ 的所有元素

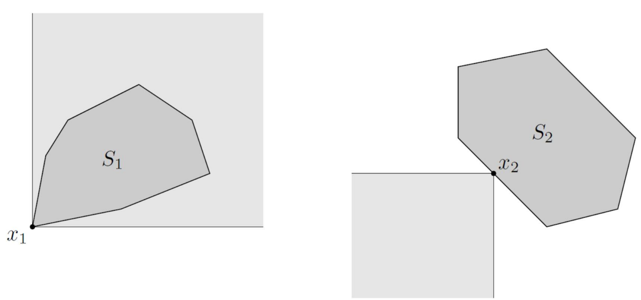


图: 集合 S_1 关于 $\mathbb{R}^2$ 上的分量不等式有最小元 $\mathbf{x}_1$。点 $\mathbf{x}_2$ 是 S_2 的极小元

对偶锥

- 令 K 为一个锥，集合 $K^* = \{\mathbf{y}|\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in K\}$ 称为 K 的对偶锥
- 从几何上看，$\mathbf{y} \in K^*$ 当且仅当 $-\mathbf{y}$ 是 K 在原点上的一个支撑超平面的法线
- 非负象限：锥 $\mathbb{R}^n_+$ 的对偶是它本身 $\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \succeq 0 \Longleftrightarrow \mathbf{y} \succeq 0$

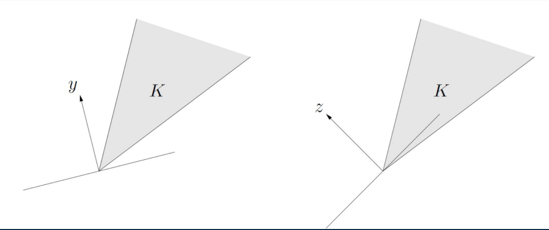


图: 以 $\mathbf{y}$ 为内法向量的半空间包含锥 K，因此 $\mathbf{y} \in K^*$ 。以 $\mathbf{z}$ 为内法向量的半空间不包含锥 K，因此 $\mathbf{z} \in K^*$

对偶锥性质

对偶锥有如下性质（课后作业证明）:

- 无论 K 是不是闭凸锥，K^* 是闭凸锥（由几何意义可见，两个支撑超平面的凸组合一定也是支撑超平面）
- $K_1 \subseteq K_2$ 可导出 $K_2^* \subseteq K_1^*$
- 如果 K 有非空内部，那么 K^* 是尖的
- 如果 K 的闭包是尖的，那么 K^* 有非空内部
- K^{**} 是 K 的对偶锥 K^* 的对偶锥，也是 K 的凸包的闭包
- 如果 K 是闭凸锥，那么 $K^* = K$
- 上述性质表明，如果 K 是一个正常锥，那么它的对偶 K^* 也是正常锥，且 $K^* = K$

广义不等式的对偶

- 正常锥 K 可以导出一个广义不等式 $\preceq_K$, 其对偶锥 K^* 也是正常的，所以也能到处一个广义不等式 $\preceq_{K^*}$，我们称 $\preceq_{K^*}$ 是 $\preceq_K$ 的对偶
- 广义不等式及其对偶有如下重要性质:
  - $\mathbf{x} \preceq_K \mathbf{y}$ 当且仅当对于任意 $\lambda \succeq_{K^*} 0$ 有 $\lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq \lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$
  - $\mathbf{x} \prec_K \mathbf{y}$ 当且仅当对于任意 $\lambda \succeq_{K^*} 0$ 和 $\lambda \neq 0$ 有 $\lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{x} < \lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$
- 由于 $K^{**} = K$，与 $\preceq_{K^*}$ 相关的对偶广义不等式为 $\preceq_K$，因此交换广义不等式及其对偶以后，上述性质依然成立
- 例：$\lambda \preceq_{K^*} \mu$ 的充要条件是对于所有 $\mathbf{x} \preceq_K 0$ 有 $\lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq \mu^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$

线性严格广义不等式的择一定理

- 设有正常锥 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，考虑严格广义不等式 $\prec_K$

$$A\mathbf{x} \prec_K \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{6}$$

  不可行，也就是仿射集合 $\{\mathbf{b} - A\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ 与开凸集 $\mathbf{int}\ K$ 不相交
- 那么存在一个分离超平面，即非零的 $\lambda \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mu \in \mathbb{R}$ 使得对于任意 $\mathbf{x}$ 有 $\lambda^{\mathrm{T}}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) \leq \mu$，对于任意的 $\mathbf{y} \in K$ 有 $\lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mu$，这种情况当且仅当 $\lambda \in K^*$ 和 $\mu \leq 0$ 才可能发生
- 综上可知当式 (6) 不可行时，存在 λ 使得

$$\lambda \neq 0,\ \lambda \succeq_{K^*} 0,\ A^{\mathrm{T}}\lambda = 0,\ \lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \leq 0 \tag{7}$$

- 反方向证明，假设式 (6) 与式 (7) 同时成立，由 $\lambda \neq 0, \lambda \succeq_{K^*} 0, \mathbf{b} - A\mathbf{x} \succ_K 0$，我们有 $\lambda^{\mathrm{T}}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) > 0$。又因为 $A^{\mathrm{T}}\lambda = 0$ 我们可以找到 $\lambda^{\mathrm{T}}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = \lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \geq 0$，这就与 $\lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \leq 0$ 产生了矛盾
- 式 (4) 和式 (5) 是本择一定理在 $K = \mathbb{R}^m_+$ 上的特殊情况

最小元的对偶性质

- 我们可以用对偶广义不等式来刻画集合 $S \subseteq \mathbb{R}^m$（可能非凸）关于正常锥 K 导出的广义不等式的最小元和极小元
- $\mathbf{x}$ 是 S 上关于广义不等式 $\preceq_K$ 的最小元的充要条件是，对于所有的 $\lambda \succ_{K^*} 0$,$\mathbf{x}$ 是 $\mathbf{z} \in S$ 上极小化 $\lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{z}$ 的唯一最优解
- 几何上看，这意味着对于任意的 $\lambda \succ_{K^*} 0$ 超平面 $\{\mathbf{z} | \lambda^{\mathrm{T}}(\mathbf{z}-\mathbf{x})=0\}$ 是 $\mathbf{x}$ 处对 S 的一个严格支撑超平面（所谓严格就是与 S 只相交于 $\mathbf{x}$）
- 上述结论对 S 是不是凸集无要求

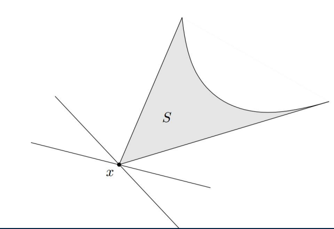


图: 最小元的对偶性质：点 $\mathbf{x}$ 是集合 S 中关于 $\mathbb{R}^2_+$ 的最小元 $\Longleftrightarrow$ 对于任意的 $\lambda \succ_{K^*} 0$ 超平面 $\{\mathbf{z} | \lambda^{\mathrm{T}}(\mathbf{z}-\mathbf{x})=0\}$ 在 $\mathbf{x}$ 处对 S 的一个严格支撑，即超平面规定的一个半空间包含了 S，且只在 $\mathbf{x}$ 处与 S 接触